Intervale de numere reale

$$(-\infty, 3]$$

Ce este un interval? În această lecție o să vedem ce sunt **intervalele de numere reale,** cum se notează intervalele și apoi vom rezolva exerciții cu intervale. La final ți-am pregătit și un mic **test online** pentru verificarea cunoștințelor.

Dacă un muzeu are programul de vizitare cuprins în intervalul orar 10-18, înseamnă că acesta se poate vizita *începând cu ora 10*, dar *nu mai târziu de ora 18.*

Dacă media unei clase la teza de matematică este cuprinsă în intervalul 7-8, înseamnă că aceasta este mai mare decât 7 și mai mică decât 8. Dar ar putea fi chiar 7? Sau 8? Vom lămuri imediat acest aspect.

Intervale mărginite

Fie *a* și *b* două numere reale cu *a<b.*

Prin **intervalul închis [*a,b*]** înțelegem toate numerele reale mai mari sau egale cu *a* și mai mici sau egale cu *b*, adică mulțimea:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ Interval închis

Numerele *a* și *b* se numesc *capetele* sau *extremitățile* intervalului.

Prin **intervalul deschis (*a,b*)** înțelegem toate numerele reale mai mari decât *a* și mai mici decât *b*, adică mulțimea:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Interval deschis

Intervalele deschise **nu** conțin extremitățile *a* și *b.*

Și acum să revenim la media clasei. Dacă media este în intervalul (7,8), atunci aceasta este strict mai mare decât 7 și mai mică decât 8. Dacă notăm intervalul astfel: [7,8], atunci media poate fi inclusiv 7 sau 8.

ntervalele pot fi deschise într-o parte și închise în cealaltă. Trebuie doar să avem grijă să scriem paranteza dreaptă atunci când capătul respectiv face parte din interval.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Primul interval este închis la stânga și deschis la dreapta. Al doilea este interval deschis la stânga și închis la dreapta.

Intervale nemărginite

Prin intervalul **[*a*, +∞)** înțelegem toate numerele reale mai mari sau egale cu *a*, adică mulțimea:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

Prin intervalul **(*a*, +∞)** înțelegem toate numerele reale strict mai mari decât *a*, adică mulțimea:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

Prin intervalul **(-∞,*a*]** înțelegem toate numerele reale mai mici sau egale cu *a*, adică mulțimea:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

Prin intervalul **(-∞,*a*)** înțelegem toate numerele reale mai mici decât *a*, adică mulțimea:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Exercițiul 1

Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

1. $2 \in (2,3)$
2. $2 \in [2,3)$
3. $5 \in [1,4]$
4. $5 \in [1,5)$
5. $0 \in (-1,1)$
6. $-2 \in (-3,+\infty)$
7. $4 \in (-\infty,4]$
8. $0 \in (-\infty,0)$

Rezolvare.

1. F (la 2 avem interval deschis, deci 2 nu face parte din interval);

2. A;

3. F;
4. F;
5. A;
6. A;
7. A;
8. F.

Exercițiul 2

Scrieți sub formă de interval următoarele mulțimi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\};$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le \sqrt{3}\};$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{5}\};$$
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le \frac{2}{3}\right\};$$
$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}.$$

Rezolvare.

$$A = (-2,1);$$
$$B = [-1, \sqrt{3}];$$
$$C = (-\infty, \sqrt{5});$$
$$D = \left(0, \frac{2}{3}\right];$$
$$E = \left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, +\infty\right).$$

Exercițiul 3

Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le \frac{x+8}{2} \le 5\right\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 3\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 8\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \le 6\}$;
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge 2\}$.

Rezolvare.

a) Rezolvăm inecuația înmulțind inegalitatea cu 2 pentru a elimina numitorul, apoi scădem 8 pentru a-l afla pe *x*:

$$-3 \le \frac{x+8}{2} \le 5 \mid \cdot 2$$
$$-6 \le x+8 \le 10 \mid -8$$
$$-6-8 \le x \le 10-8$$
$$-14 \le x \le 2$$
$$x \in [-14,2]$$

A=[-14,2].

b) Să ne reamintim interpretarea geometrică a modulului. Modulul unui nr. *x* este distanța de la originea axei până la punctul având coordonata *x*. Trebuie să găsim toate numerele reale care au modulul mai mic sau egal cu 3. Acestea sunt numerele cuprinse în intervalul [-3,3], după cum se vede în imaginea de mai jos:

Numerele din porțiunea albastră au modulul mai mic sau egal cu 3

B=[-3,3]

Să reținem că, dacă *x* este număr real, atunci o inegalitate de forma

$$|x| \le a$$

se poate rescrie astfel:

$$-a \le x \le a \text{ sau } x \in [-a,a]$$

Dacă inegalitatea este strictă: $|x| < a$, atunci aceasta se poate scrie astfel: $-a < x < a$ și *x* aparține intervalului deschis $(-a,a)$.

c) $|x| < 8$

$-8 < x < 8$

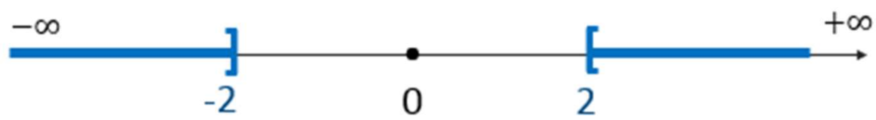
C = (-8,8).

d)

$$-6 \le x - 3 \le 6 \mid +3$$
$$-6 + 3 \le x \le 6 + 3$$
$$-3 \le x \le 9$$
$$x \in [-3,9]$$

D=[-3,9].

e) Numerele care au modulul mai mare sau egal cu 2 sunt cele pentru care distanța până la originea axei este mai mare sau egală cu 2, adică numerele din porțiunea albastră conform imaginii de mai jos:



Numerele din zona albastră au modulul mai mare sau egal cu 2

$$E = (-\infty, 2] \cup [2, +\infty).$$

Să reținem că, dacă *x* este număr real, atunci o inegalitate de forma

$$|x| \geq a$$

se poate scrie și astfel:

$$x \in (-\infty, a] \cup [a, +\infty)$$

Dacă inegalitatea este strictă $|x| > a$, atunci *x* aparține intervalului $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$.

Acum e rândul tău   Încearcă să rezolvi singur următoarele exerciții.

Temă

Exercițiul 1

Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

1. $3 \in (2,3)$
2. $2 \in [2,3)$
3. $0 \in [1,4]$
4. $4 \in [1,5)$
5. $2 \in (-1,1)$
6. $-3 \in (-3, +\infty)$
7. $6 \in (-\infty, 6]$
8. $1 \in (-\infty, 0)$

Exercițiul 2

Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{7}\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 8\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq 1\}$;
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \geq 2\}$.