Fisa de documentare _grupa 1, 2

Descompunerea numerelor naturale

Descompunerea numerelor naturale în produs de factori primi ne ajută la aflarea celui mai mare divizor comun, atunci când simplificăm fracţiile şi la aflarea celui mai mic multiplu comun, atunci când aducem fracţiile la acelaşi numitor, pentru a le aduna, pentru a le scădea sau pentru a le compara. Vedeţi, două operaţii cu fracţii necesită până la urmă descompunerea numerelor naturale în produs de factori primi.

Ca să înţelegem şi mai bine, iată un exemplu: avem fracţia . Vrem să o simplificăm, dar nu este chiar aşa uşor pentru că numitorul nu este par, numărătorul ar fi. Cu 2 nu putem să împărţim, ambele sunt divizibile la 3 pentru că respectă criteriul de divizibilitate cu 3: 2 plus 1 este 3, 2 plus 1 este 3, cu 3, 6. Ambele se împart la 3. Am putea simplifica cu 3, dar alegem o metodă mai elegantă. Fiţi atenţi! Descompunem numărătorul şi numitorul în produs de factori primi. Să vedem din ce sunt făcute. 210 l-am descompus eu şi vă spun că este egal cu 2 ori 3 ori 5 ori 7, iar 231 este egal cu 3 ori 7 ori 11. Vedeţi, în momentul în care avem descompunerea realizată, putem observa cu uşurinţă care sunt factorii comuni celor două numere, adică atât numărătorului, cât şi numitorului, şi avem 3 şi 7 şi putem simplifica din prima cu 21, adică cu 3 ori 7. Spunem că cel mai mare divizor comun dintre 210 şi 231 este 21 şi acum simplificăm. 3-ul de aici cu 3, 7 de aici cu 7 şi mai rămâne 2 ori 5 aici şi 11 aici, adică . Iată fracţia noastră este egală cu . După ce facem orice calcul, apreciem puţin rezultatul. aproape o fracţie unitară, mai lipseşte puţin de aici, mai lipseşte 21. , aproape o fracţie unitară şi ea, mai lipseşte 1 de aici. Deci rezultatul pare corect.

Acum luăm şi un exemplu de aducere la acelaşi numitor. Vrem să adunăm:

$$\frac{31}{231} + \frac{19}{143}$$

Pentru a face adunarea, trebuie să aducem cele două fracţii la acelaşi numitor comun. Pentru a aduce la acelaşi numitor comun, trebuie să aflăm cel mai mic multiplu comun dintre aceste numere. Şi pentru aceasta, vom descompune în factori primi cei 2 numitori. Ia să vedem! 231 este 3 ori 7 ori 11, şi 143 este 11 ori 13. Numărătorul se păstrează. Acum care este cel mai mic multiplu comun dintre aceste numere? Aici lipseşte 13 şi aici lipseşte 3 ori 7, adică 21. Amplificăm aici cu 13 şi aici cu 3 ori 7:

$$\frac{31}{231}+\frac{19}{143}={}^{13)}\frac{31}{3\cdot7\cdot11}+{}^{3\cdot7)}\frac{19}{11\cdot13}$$

Şi mai departe la numărător, aici vom avea 3 ori 7 ori 11 ori 13, la numitor vom avea 13 ori 31, da? Trebuie neapărat să înmulţim şi numărătorul şi numitorul cu acelaşi număr, ca să păstrăm valoarea fracţiei identică cu ce a fost înainte, plus 3 ori 7 ori 11 ori 13 la numitor, vedem că numitorii acum sunt egali, 3 ori 7 ori 19 la numărător. Acum ştim că cel mai mic multiplu comun dintre 231 şi 143 este 3 ori 7 ori 11 ori 13, adică 3003. Scriem 3003 aici, iar la numărător, avem 13 ori 31 plus 3 ori 7 ori 19 , care este egal cu 802.

$$\frac{13\cdot31}{3\cdot7\cdot11\cdot13}+\frac{3\cdot7\cdot19}{3\cdot7\cdot11\cdot13}=\frac{13\cdot3}{}$$

Acum vă arăt o altă metodă de descompunere a factorilor primi, mai elegantă, mai de clasa a VI-a.

Îl luăm tot pe 105, căruia îi ştim descompunerea în factori primi şi este egal cu 3 ori 5 ori 7. Pentru a descompune un număr natural în produs de factori primi, fiţi atenţi, împărţim pe rând la numerele prime, acel număr, luate în ordine crescătoare. Adică luăm toate numerele prime şi începem: cu 2, este divizibil cu 2? Nu. Nu-l împărţim. Este divizibil cu 3? Da. Îl împărţim la 3. Apoi, este divizibil cu 5? Da. Îl împărţim şi la 5. Şi tot aşa, până când ajungem la un produs de factori primi. Adică toate numerele din rezultatul nostru, toate numerele astea înmulţite, sunt numere prime. Trebuie să ştim şi numerele prime, apoi să reţin acelea la care împărţirea se face exact, adică acestea:

$$105=3\cdot35=3\cdot5\cdot7$$

Bine, acum această specificaţie: „luate în ordice crescătoare” are excepţiile ei. Veţi avea la un moment dat numere cărora le veţi şti factorii direct, şi va fi mai uşor să împărţiţi la acel factor chiar dacă nu este cel mai mic număr prim. Chiar şi aici putem realiza o altă variantă de descompunere, pentru că imediat observăm că acest număr este divizibil cu 5, conform criteriului de divizibilitate cu 5 şi îl împărţim rapid la 5. 105 împărţit la 5 este 21, că 5 în 10 intră de două ori şi 5 în 5, intră odată. Iar 21 ştim că este 3 ori 7, şi iată că descompunerea noastră este gata probabil ceva mai uşor decât în varianta de sus.

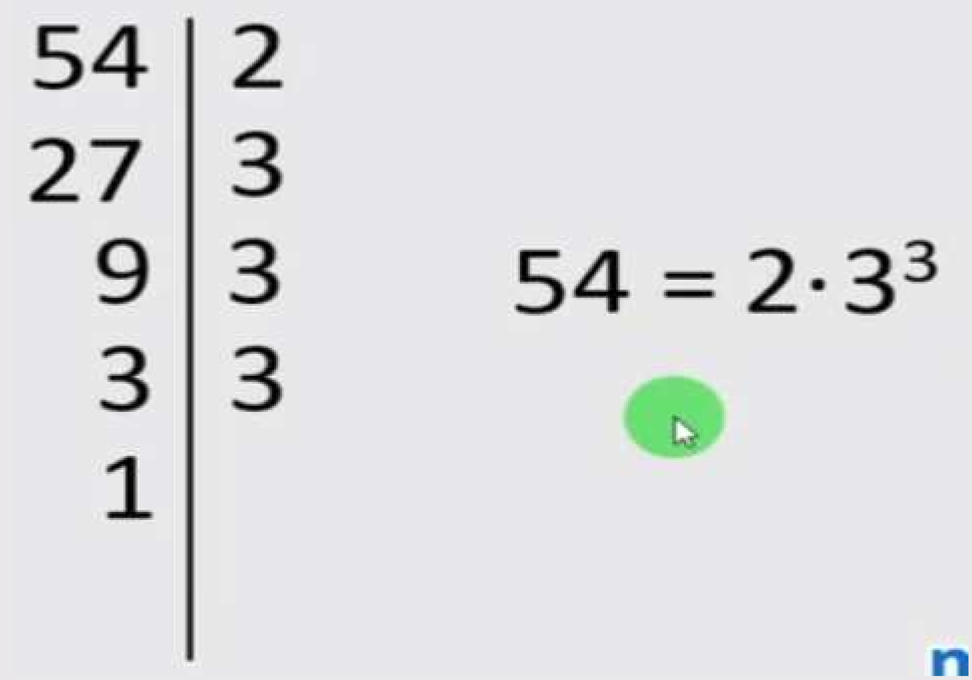
$$105 = 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7$$

Dar să vedem totuşi care sunt numerele prime. O să folosim cel mai adesea numerele prime până la 100. Şi ele sunt: 2, 3, 5, 7, spuneţi voi! 11, da, mai departe, 13, mai departe, 17, ştiţi care e următorul? 19, 23, mai departe mai ştiţi? 29, 31, mai departe, 33 nu e că e divizibil cu 11, dar este 37, 41, 43, 47, spuneţi voi aici! 53, 59, 61, 67, 71, ar fi bine să ţineţi minte aceste numere prime pentru că vă vor folosi foarte mult în descompuneri, în aducere la acelaşi numitor, în simplificări, mai ales acestea din primul rând. 73 urmează, 79, 83, 89, 97 este ultimul număr prim mai mic decât 100. Bun, acum că ştim care sunt numerele prime şi cunoaştem şi cum se descompune un alt număr în produs de factori primi, adică în produs de aceste numere , putem afla marele şi misteriosul algoritm de descompunere în factori primi a numerelor naturale.

Îl luăm prima dată pe 12 că este un număr mic şi deja îi cunoaştem descompunerea. Da? Este 3 ori 4, adică 2 ori 2 ori 3. Îl luăm prima dată pe 2, şi încercăm să împărţim 12 la 2, pentru că de data aceasta numărul nostru este divizibil cu 2. 12 împărţit la 2 este 6, şi atât timp cât numărul nostru de aici este divizibil cu 2, nu-l lăsăm pe 2, nu-l scăpăm, rămânem la 2 şi îl scoatem pe 2 din numărul nostru de câte ori este necesar. 2, 6 împărţit la 2, 3. Vedeţi? Am împărţit numărul la factorul nostru.şio am scris rezultatul aici, iar am împărţit numărul la factorul nostru şi am scris rezultatul aici. 3 cu ce factor prim este divizibil? Cu 3, normal. 3 împărţit la 3 e 1 şi când ajungem la 1, ne oprim. Şi aici avcem factorii noştri primi, adică 12 este egal cu 2 ori 2 ori 3, iar 2 ori 2 este de fapt, 2 la puterea a doua. Deci scriem 12 este egal cu 2 la puterea a doua ori 3. Aceasta este descompunerea în factori primi a numărului 12:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12 = 2^2 \cdot 3$$

54. Trasăm o linie verticală şi îl împărţim la 2, pentru că este par. 54 împărţit la 2 este: 2 în 5 de două ori, şi rămâne 1, 2 în 14, de 7 ori. Continuăm. 2 plus 7 este 9. Numărul nostru este divizibil la 3. Îl împărţim la 3. 9, da? Că 27 împărţit la 3 este 9, iarăşi îl avem pe 3, nu plecăm de la 3 până când nu-l terminăm, 3, 9 împărţit la 3, 3, mai avem un trei aici şi rezultatul e 1. Descompunerea în factori primi a numărului 54 este 2 ori 3 ori 3 ori 3, adică 54 este egal cu 2 ori 3 la puterea...la puterea a treia.



Alt număr, un pic mai complicat, 210 vedem că este număr par şi am putea să-l împărţim la 2. Dar pe de altă parte, vedem că se termină cu 0, ceea ce înseamnă că este divizibil cu 10, adică direct cu 2 ori 5. Putem scrie 2 ori 5, rămâne 21, acum vedem că este divizibil cu 3, vedeţi, l-am luat pe 2 şi l-am luat pe 5, l-am sărit pe 3 deocamdată, dar ne întoarcem. Nu săriţi prea departe! Ce vă spun eu se întâmplă mai ales în cazuri în care avem 0 la sfârşit şi ştim clar că 0 este de fapt 2 ori 5. Este foarte uşor să descompunem în acest mod şi avem şanse mai mici să greşim, pentru că împărţirea la 10 este foarte, foarte simplă, doar copiem celelelte numere. Acum îl împărţim pe 21 la 3, ne rămâne 7, îl luăm şi pe celălalt factor prim, adică 7, ne-a rămas aici 1. Descompunerea în factori primi a numîrului 210 este 2 ori 3 ori 5 ori 7.

$$\begin{array}{r|l}
210 & 2\cdot 5 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

$$210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$