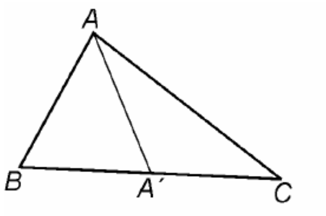
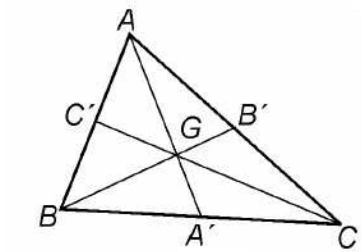
<u>Linii importante în triunghi</u>

1. Mediana

Să considerăm un triunghi fixat *ABC*.
Se numeşte **mediană** a triunghiului *ABC* un segment care uneşte un vârf al Δ *ABC* cu mijlocul laturii opuse.
De exemplu, mediana care uneşte vârful *A* cu mijlocul *A'* al lui BC se numeşte **mediana din *A*.**



Aşadar există trei mediane [AA'], [BB'], [CC'].
Teoremă. Cele trei mediane ale unui triunghi sunt concurente (adică trec prin acelaşi punct).
Punctul lor comun se numeşte **centrul de greutate** (sau **baricentrul)** triunghiului (notat cu G).



Punctul G este interior triunghiului ABC şi este situat de fiecare mediană la o treime de bază şi la două treimi de vârf.

$GA' = \frac{1}{3}AA'$; $AG = \frac{2}{3}AA'$

$GB' = \frac{1}{3}BB'$; $BG = \frac{2}{3}\ BB'$

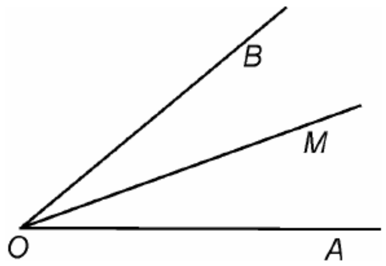
$GC' = \frac{1}{3}CC'$; $CG = \frac{2}{3}CC'$.

Pentru lungimile medianelor se mai utilizează notaţiile: $AA' = m_a$, $BB' = m_b$, $CC' = m_c$.

Observaţie. Mediana împarte un triunghi în două triunghiuri de arii egale (triunghiuri echivalente).

2. Bisectoarea

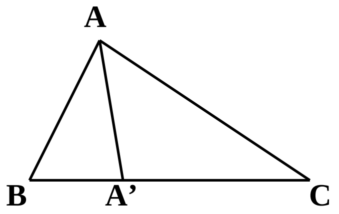
Pentru a da definiţia următoare, avem nevoie de o noţiune preliminară. Să considerăm un unghi *AOB.* Vom numi **bisectoare a unghiului** *AOB* unica semidreaptă [OM care are proprietatea că unghiurile *AOM* şi *BOM* sunt adiacente şi congruente. Pe scurt, spunem că bisectoarea „împarte unghiul în două unghiuri congruente".



$BOM \equiv AOM$

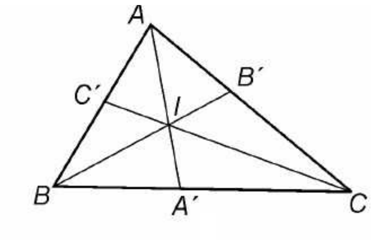
Revenind la triunghiul nostru *ABC*, vom da următoarea

Definiţie. Se numeşte **bisectoare a triunghiului** ABC o bisectoare a unuia din unghiurile Δ ABC.
De exemplu, bisectoarea unghiului Â = BAC se numeşte bisectoarea din A.

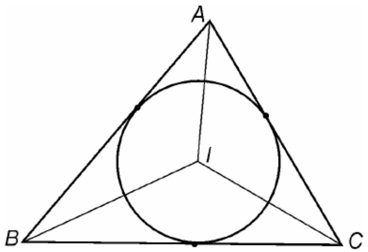


Aşadar, există trei bisectoare [AA' [BB' [CC'. Am notat cu A' punctul de intersecţie al bisectoarei lui A cu latura [BC] etc.

Teoremă. Cele trei bisectoare ale unui triunghi sunt concurente. Punctul lor comun se numeşte **centrul cercului înscris** în triunghi.



În figura de mai sus, centrul cercului înscris în Δ ABC este I. Denumirea de centru al cercului înscris în Δ ABC este explicată de figura următoare. Anume, I este centrul unicului cerc care este plasat în interiorul triunghiului şi este tangent la laturile Δ ABC (adică are în comun cu fiecare latură exact câte un punct).



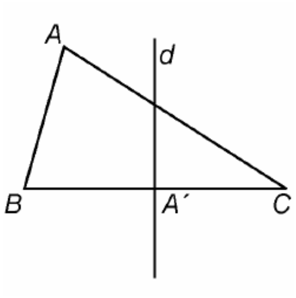
3. Mediatoarea

În continuare, avem nevoie de altă noţiune preliminară.
Definiţie. Se numeşte **mediatoare a unui segment** [AB] unica dreaptă care are următoarele proprietăţi:
a) Trece prin mijlocul C al lui [AB] (punctul C este unicul punct de pe dreapta suport a lui AB pentru care CA = CB)
b) Este perpendiculară pe AB.

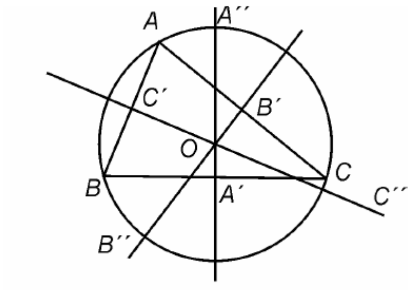
Revenind la Δ ABC vom da următoarea:

Definiţie. Se numeşte **mediatoare a triunghiului** ABC o mediatoare a uneia din laturi.
De exemplu, mediatoarea lui [BC] se numeşte mediatoarea laturii [BC]. Am notat mediatoarea cu d.

Aşadar, există trei mediatoare, A'A", BB", CC" (aici A' este mijlocul lui [BC] şi A" este un punct arbitrar pe mediatoarea laturii [BC]) etc.



Teoremă. Cele trei mediatoare ale unui triunghi sunt concurente. Punctul lor comun se numeşte **centrul cercului circumscris** triunghiului.

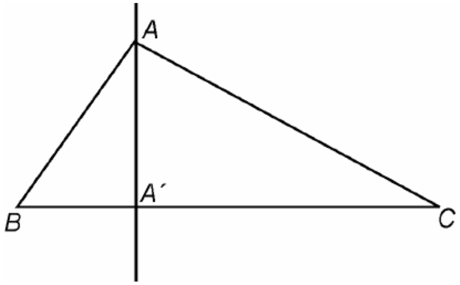


În figură, centrul cercului circumscris este O. Denumirea de centru al cercului circumscris triunghiului ABC este explicată de figură. Anume, O este centrul unicului cerc care trece prin punctele A, B. C.

Remarcă. Dacă Δ ABC este dreptunghic în A, atunci centrul cercului circumscris Δ ABC coincide cu mijlocul ipotenuzei [BC].

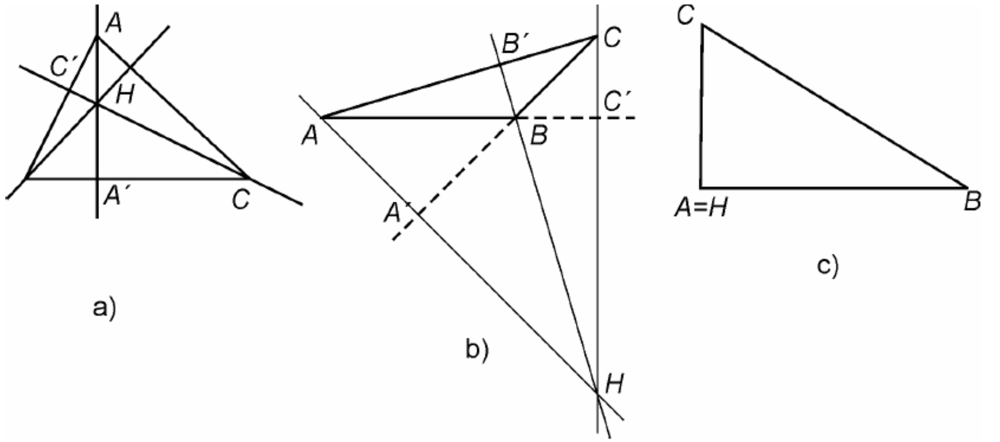
4. Înălţimea

Definiţie. Se numeşte înălţime a unui triunghi o dreaptă care trece printr-un vârf al triunghiului şi este perpendiculară pe latura opusă. De exemplu, înălţimea care trece prin A se numeşte înălţimea din A a triunghiului ABC. Am notat-o cu AA' (aici, A' este intersecţia înălţimii din A cu latura opusă, BC).



Aşadar există trei înălţimi AA'. BB', CC' (am notat cu A' un punct oarecare pe înălţimea din A etc.)
Teoremă. Cele trei înălţimi ale unui triunghi sunt concurente. Punctul lor comun se numeşte **ortocentrul triunghiului**.

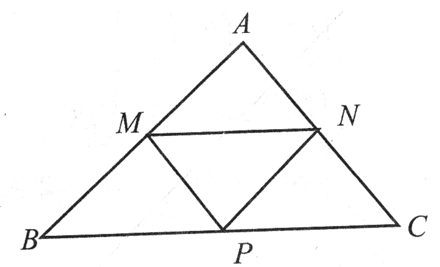
Atenţie! Poziţia ortocentrului fată de triunghi depinde esenţial de tipul triunghiului: ascuţitunghic, obtuzunghic sau dreptunghic.
În figura a), triunghiul ABC este ascuţitunghic şi ortocentrul H este interior lui ABC.
În figura b), triunghiul ABC este obtuzunghic şi ortocentrul H este exterior lui ABC. (am prelungit punctat laturile AB şi BC).
În figura c), triunghiul ABC este dreptunghic (în A) şi ortocentrul H coincide cu A.
Din aceste motive, de multe ori, pentru ca demonstraţiile să fie complete, trebuie să considerăm separat cazurile când triunghiul este ascuţitunghic, respectiv obtuzunghic, respectiv dreptunghic.



Remarcă importantă. Dacă triunghiul ABC este isoscel (de exemplu AB = AC) atunci centrul de greutate, centrul cercului circumscris şi ortocentrul se găsesc pe axa de simetrie a triunghiului ABC, care este mediatoarea „bazei" [BC].
În particular, dacă ABC este echilateral, rezultă că cele patru puncte de mai sus coincid.

5. Linia mijlocie într-un triunghi

Considerăm triunghiul ABC şi M, N, P mijloacele laturilor [AB], [AC] şi, respectiv, [BC].
Observăm că perechile de drepte MN şi BC, MP şi AC, NP şi AB sunt paralele.
Măsurând laturile triunghiului şi segmentele [MN], [NP], [MP] remarcăm că perechile de segmente [MN] şi [BC], [MP] şi [AC], [NP] şi [AB] sunt paralele.



Definiţie. Într-un triunghi, segmentul determinat de mijloacele a două laturi se numeşte **linie mijlocie.**
Deci, în Δ ABC [MN], [MP] şi [NP] sunt linii mijlocii.
Teoremă: Segmentul care uneşte mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralel cu cea de a treia latură şi are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi.